Autores:
Madalena Salgueiro
Martim Guerreiro
Francisco Gouveia
Monitor:
João Gonçalo Roboredo

Oscilações lineares e não-lineares

SOLITÕES

Introdução

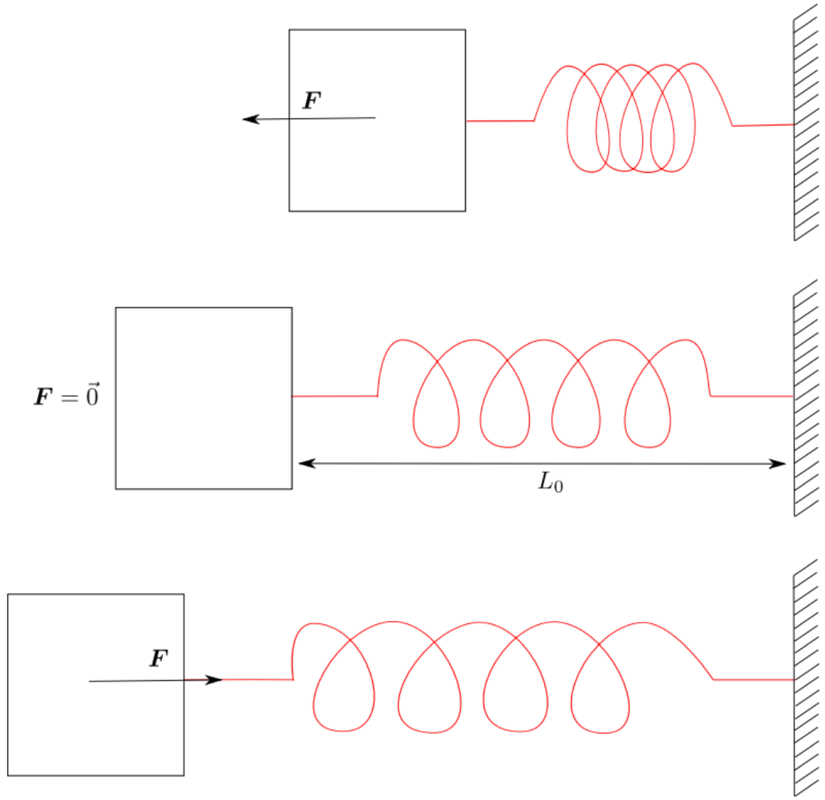
Oscilador harmónico/ não harmónico

Observação com atrito (conservação de energia)

Osciladores acoplados e modos normais

Cadeia de n massas

Lei de Hooke



$$F = -k\Delta x$$

$\Delta x \rightarrow$ Distância à posição de equilíbrio

$k \rightarrow$ Constante elástica

Equações de movimento

$$F = ma = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -kx$$

Equação diferencial

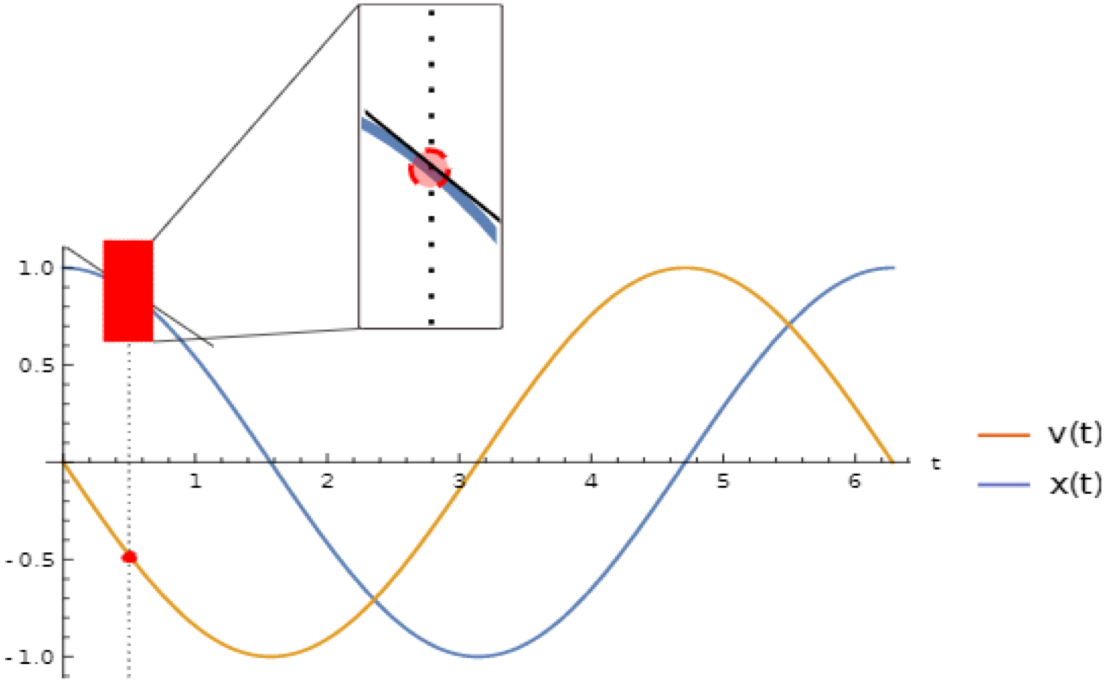
- $x(0) = x_0$
- $v(0) = v_0$

$$x(t) = x_0\cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t)$$

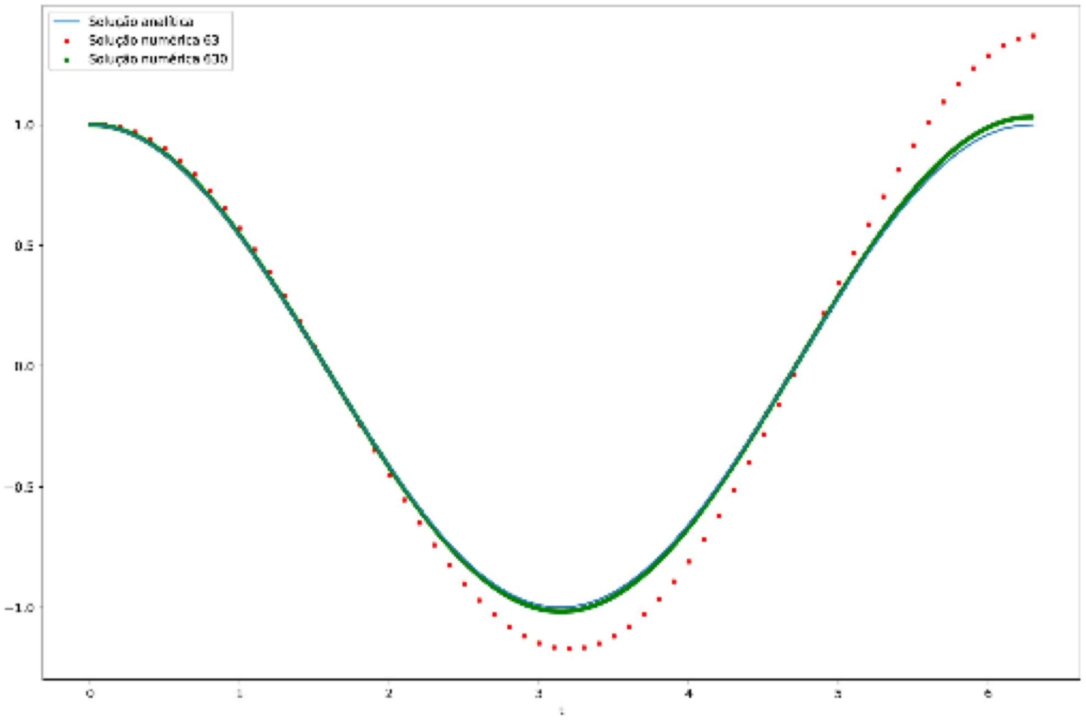
Frequência de oscilação:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

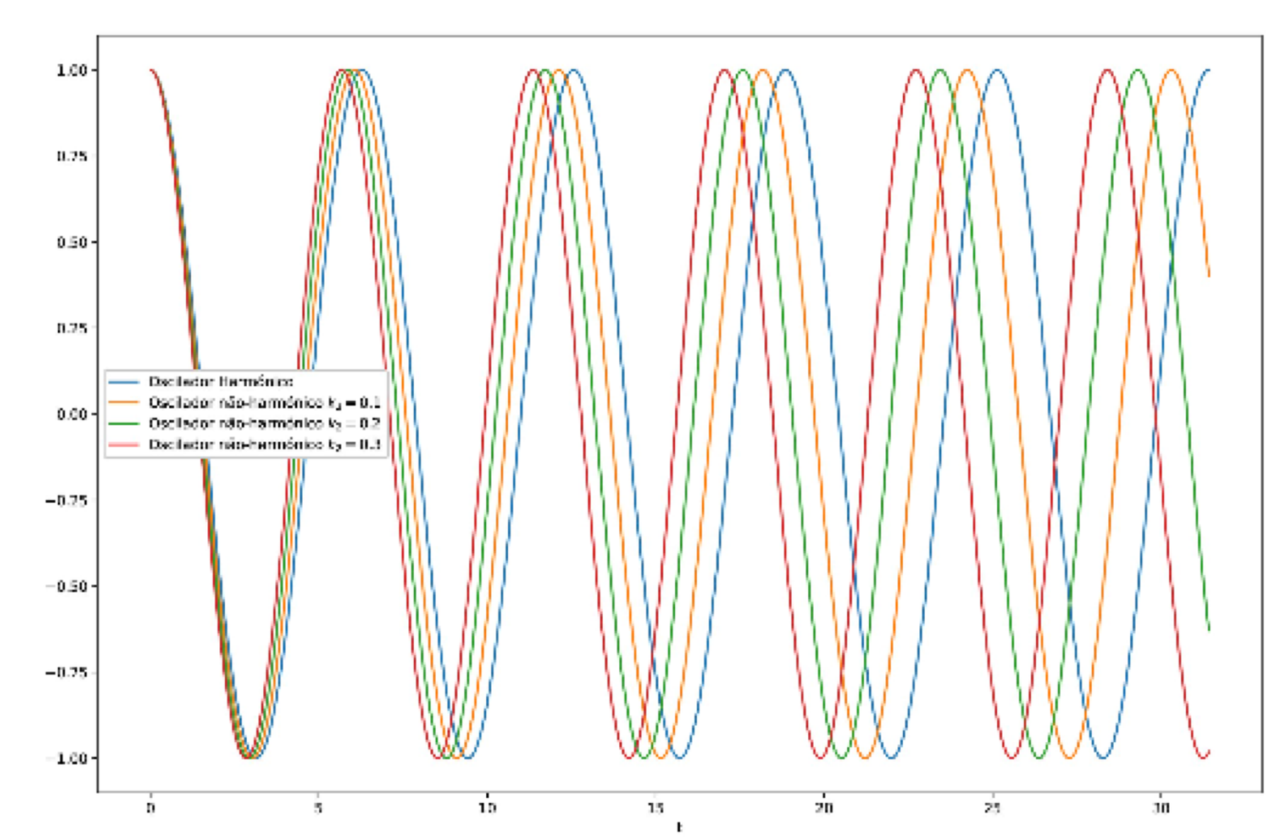
Passo de Euler



- $x_1 = x_0 + \Delta x = x_0 + v_0 \Delta t.$
- $v_1 = v_0 + \Delta v = v_0 - \dfrac{k}{m} x_0 \Delta t.$

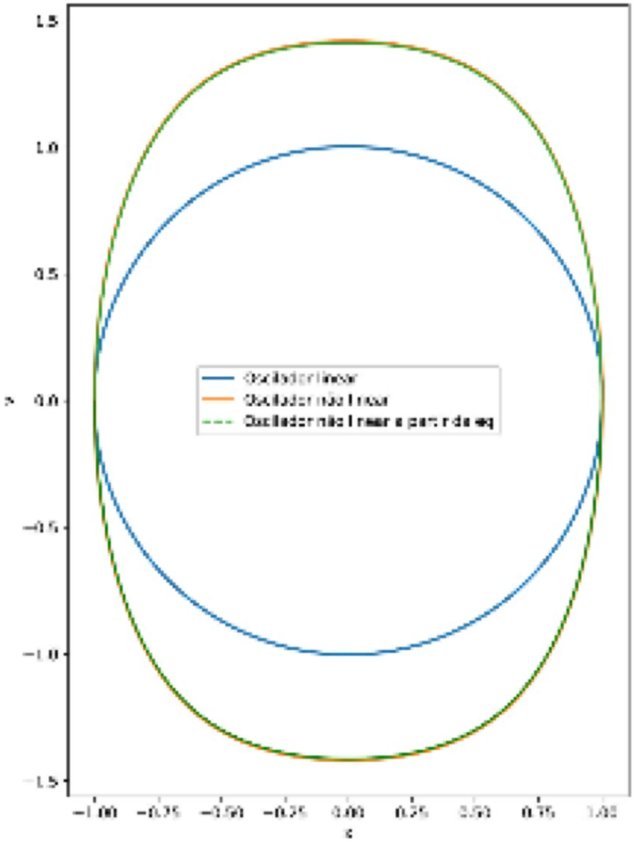

Solução analítica
Solução numérica 63
Solução numérica 630
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
0
1
2
3
4
5
6
t

Oscilador não-harmónico



$$F = -k_1x - bx^3$$

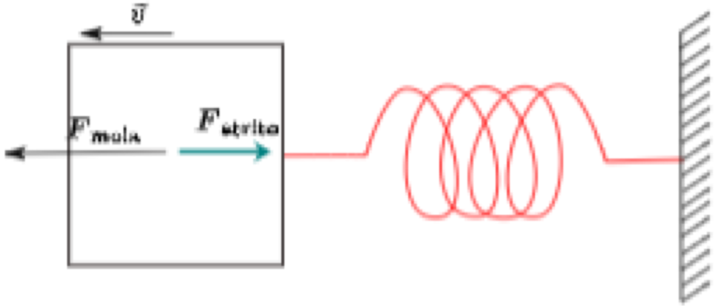
Espaço de fase: (x: posições e y: velocidades)



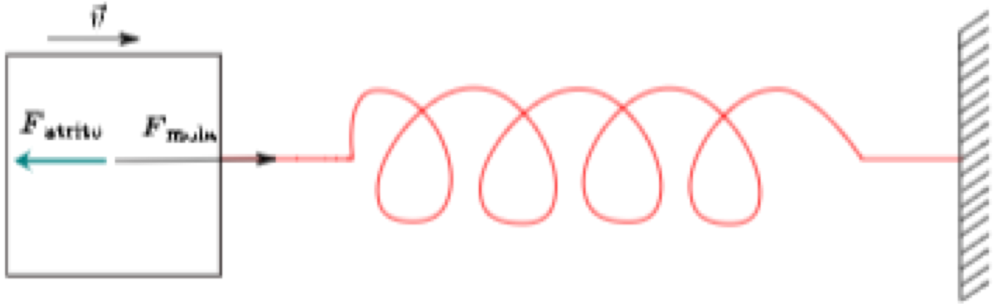
$$E = \underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{E_c} + \underbrace{\frac{1}{2}k_1x^2 + \frac{1}{4}bx^4}_{E_p}$$

Atrito

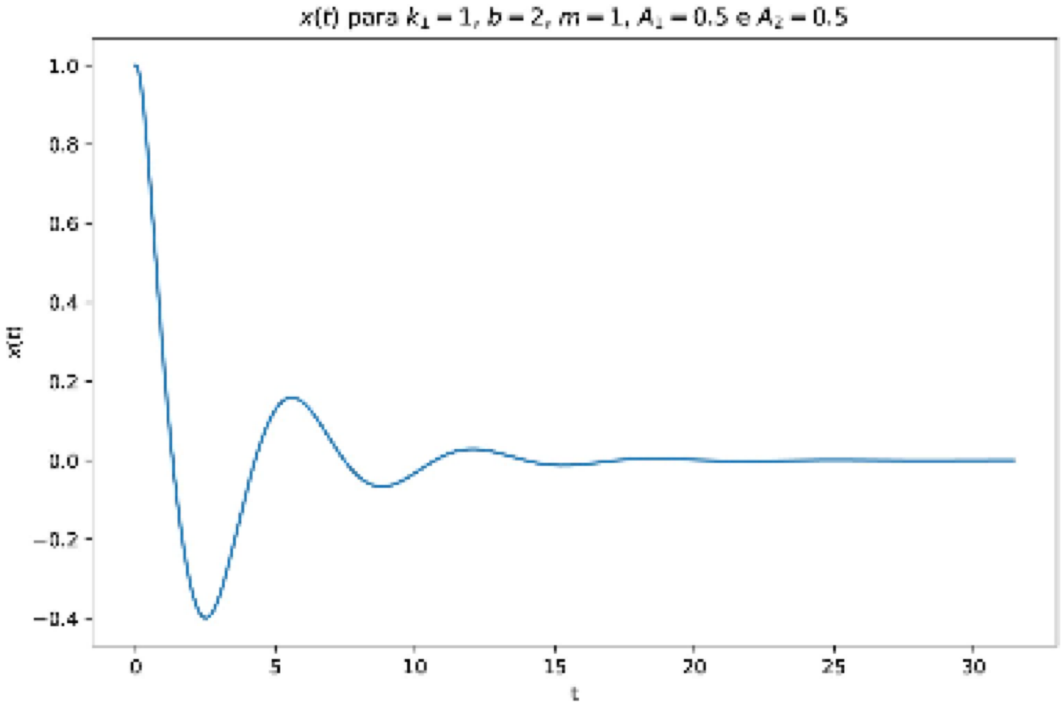
- $F_s = -A_1 v$ (
- $F_a = -A_2 \left| v \right| v$

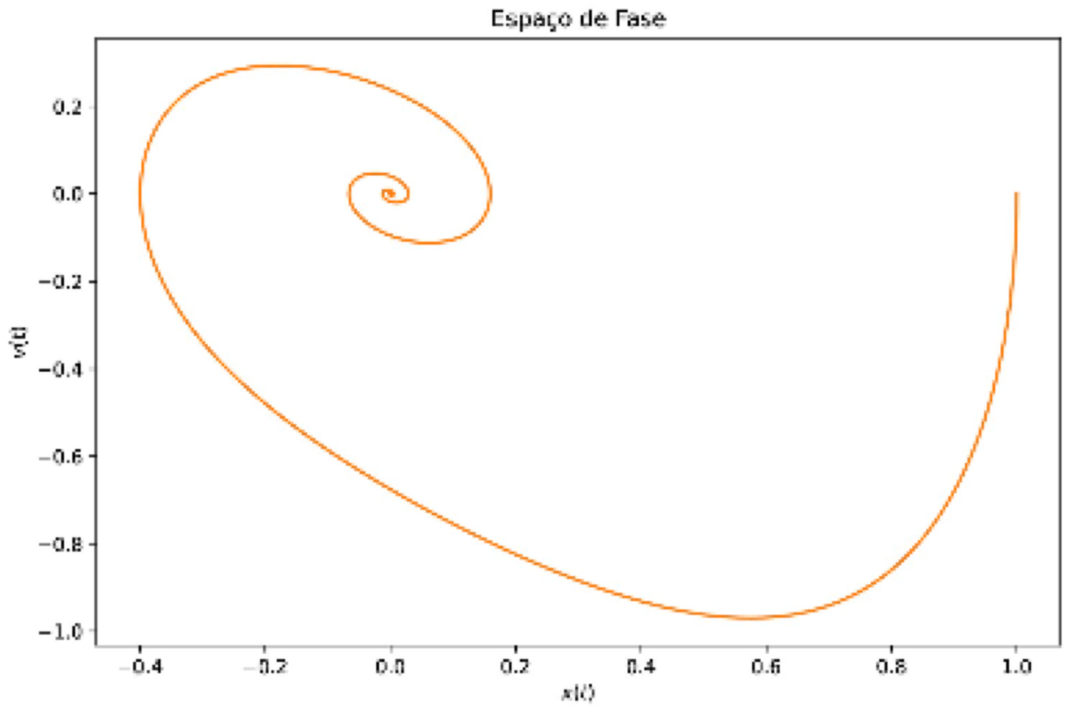


$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{k}{m}x - \frac{b}{m}x^3 - \frac{A_1}{m}v - \frac{A_2}{m}v\left|v\right|$$

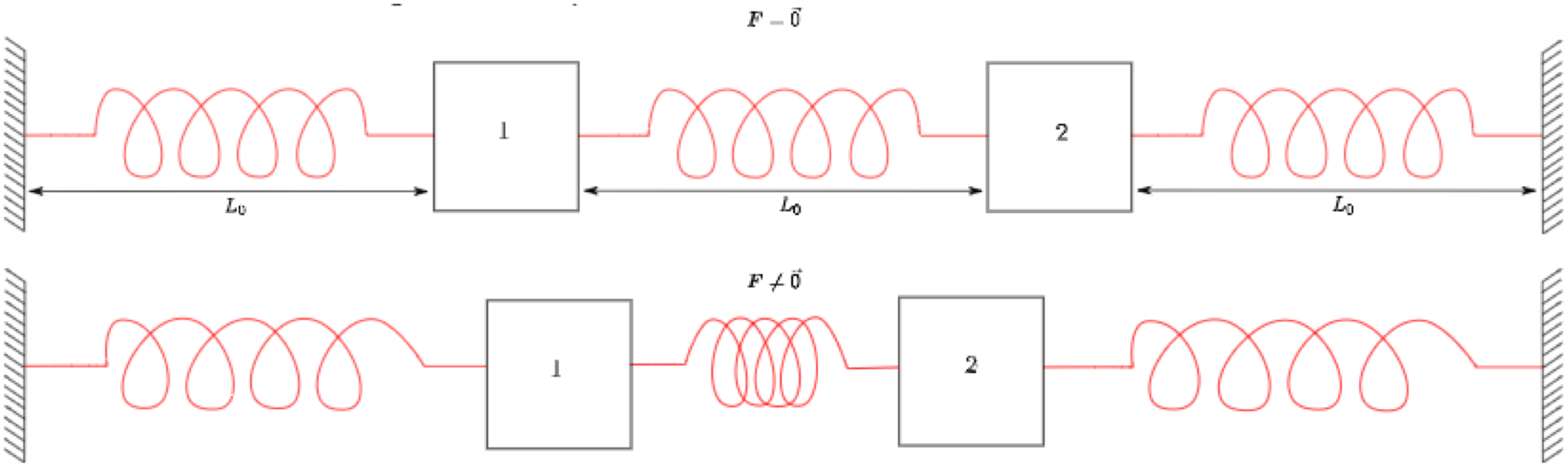


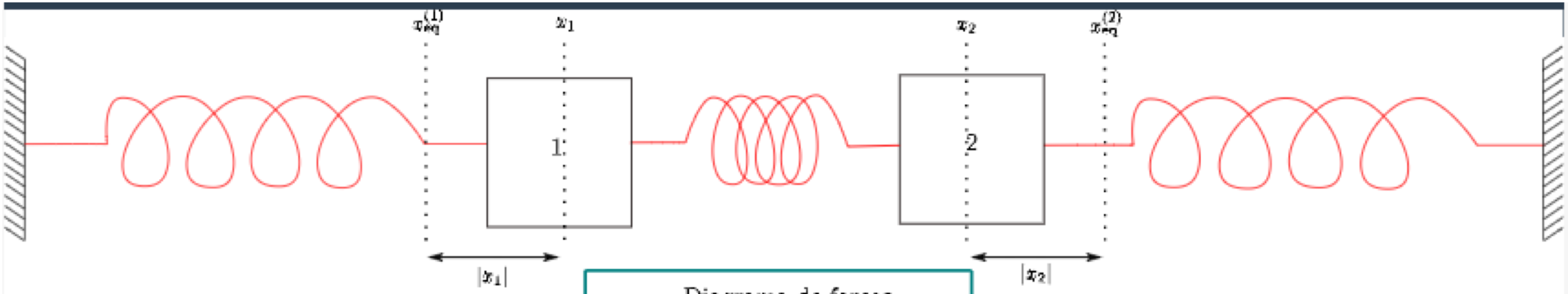
Conservação de energia vs. atrito





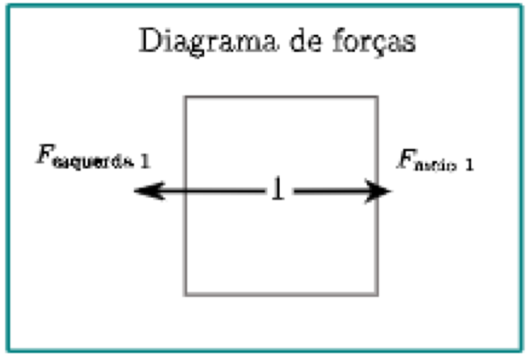
Massas acopladas





$$F_{\text{esq }1} = -k_{\text{esq}} x_1$$

$$F_{\text{meio }1} = -k_{\text{meio}}(x_1 - x_2)$$



$$F_{\text{meio }2} = -k_{\text{meio}}(x_2 - x_1)$$

$$F_{\text{dir }2} = -k_{\text{dir}} x_2$$

Massas acopladas- equações de movimento

$$\begin{cases} X_1 = x_1 + x_2 \\ X_2 = x_1 - x_2 \end{cases}$$

- $m_1 \dfrac{\mathrm{d}^2 x_1}{\mathrm{d}t^2} = k_A \left(x_2 - \left[1 + \dfrac{k}{k_A} \right] x_1 \right)$
- $m_2 \dfrac{\mathrm{d}^2 x_2}{\mathrm{d}t^2} = k_A \left(x_1 - \left[1 + \dfrac{k}{k_A} \right] x_2 \right)$

Depois de mudar as coordenadas:

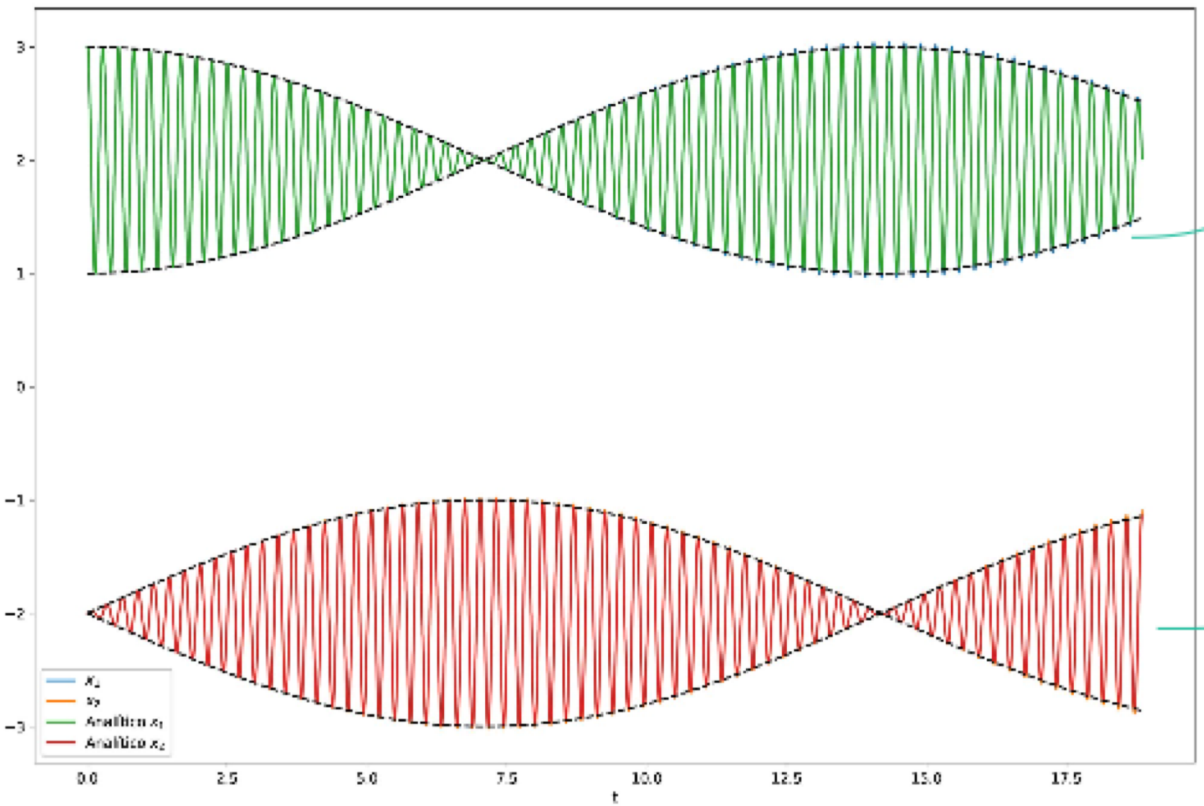
- $\dfrac{\mathrm{d}^2 X_1}{\mathrm{d}t^2} + \underbrace{\dfrac{k}{m}}_{\omega_1^2} X_1 = 0$
- $\dfrac{\mathrm{d}^2 X_2}{\mathrm{d}t^2} + X_2 \underbrace{\left(\dfrac{k}{m} + 2\dfrac{k_A}{m} \right)}_{\omega_2^2} = 0$

Modos Normais!!!

*Modo geral

Massa 1=

Massa 2=



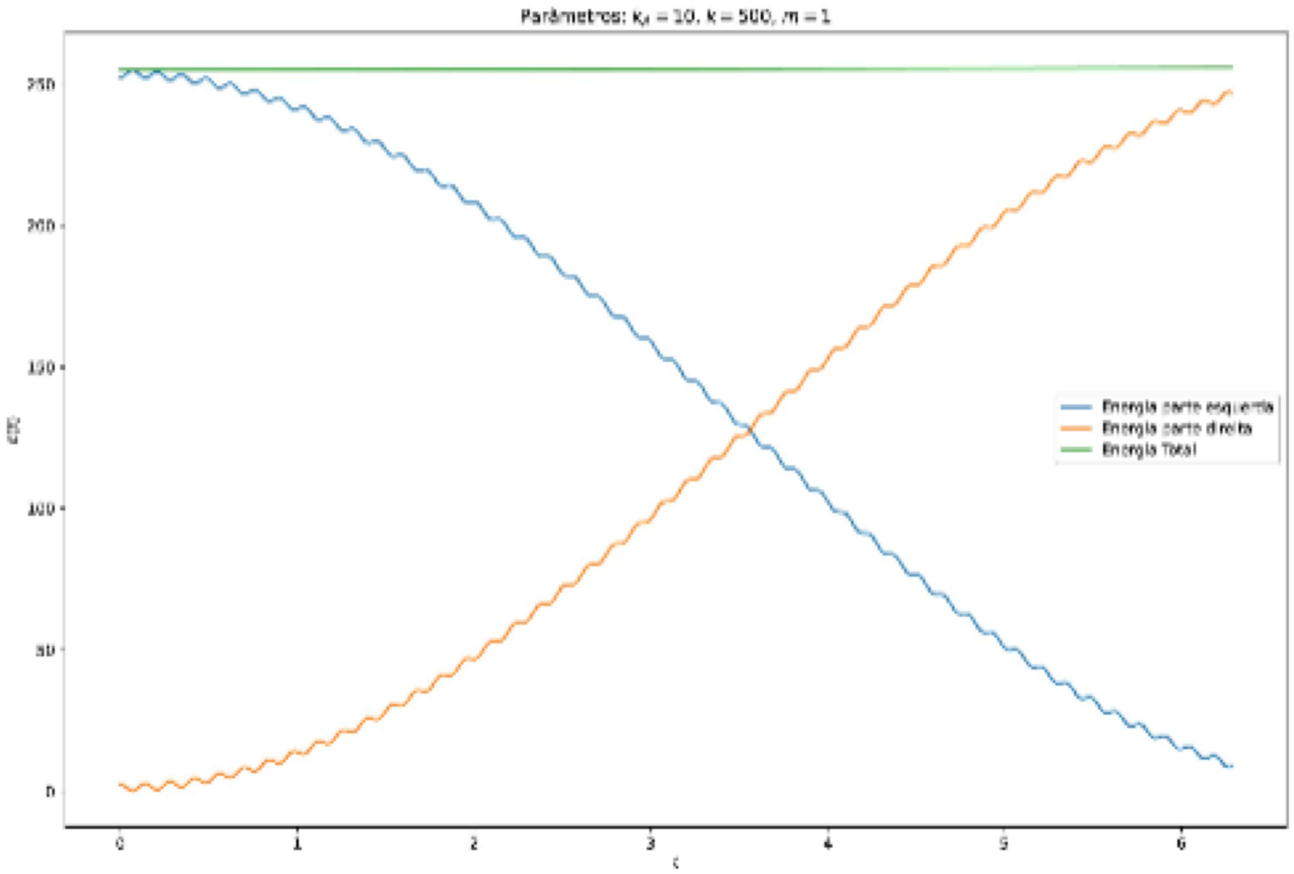
Envelope:

$$\sim \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right)$$

Oscl. rápidas:

$$\sim \cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t\right)$$

Transferência de energia



$$E_{\text{esquerda}} = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{4}k_A\left(x_1 - x_2\right)^2$$

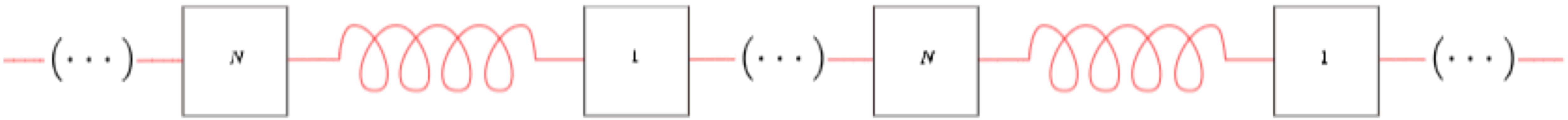
$$E_{\text{direita}} = \frac{1}{2}kx_2^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{4}k_A\left(x_1 - x_2\right)^2$$

Cadeia de massas acopladas

Condições fronteira periódicas:

$$x_{i+N} = x_i$$

$$\begin{aligned} F_i &= k\left(x_{i+1} - x_i\right) - k\left(x_i - x_{i-1}\right) \\ &= k\left(x_{i+1} + x_{i-1} - 2x_i\right) \end{aligned}$$



Solução- ondas planas longitudinais

Proponhamos a seguinte solução:

Distância entre massas

$$x_i(t) = A\cos\left(K\boxed{D} \times i - \omega t\right)$$

Condições fronteira periódicas:

$$x_{i+N} = x_i$$

$$\Longrightarrow \quad K = \frac{2n\pi}{DN}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Relação de dispersão

Se substituirmos a relação anterior na equação de movimento obtemos:

$$\boxed{\omega(K) = 2\sqrt{\frac{k}{m}}\left|\sin\left(\frac{1}{2}KD\right)\right|}$$

Relação de dispersão

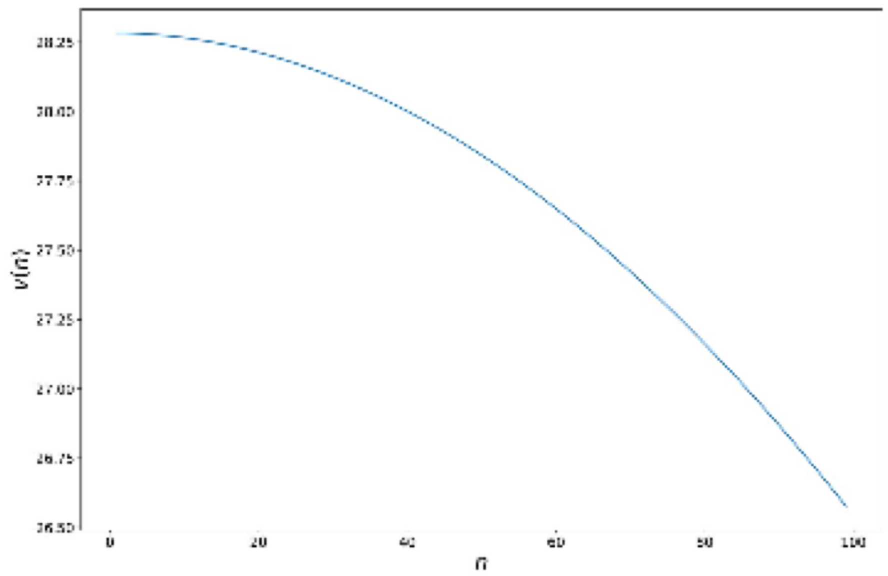
Isto significa que os diferentes modos têm velocidades diferentes!!!

Velocidade de propagação

Assim, a velocidade de propagação de uma onda é:

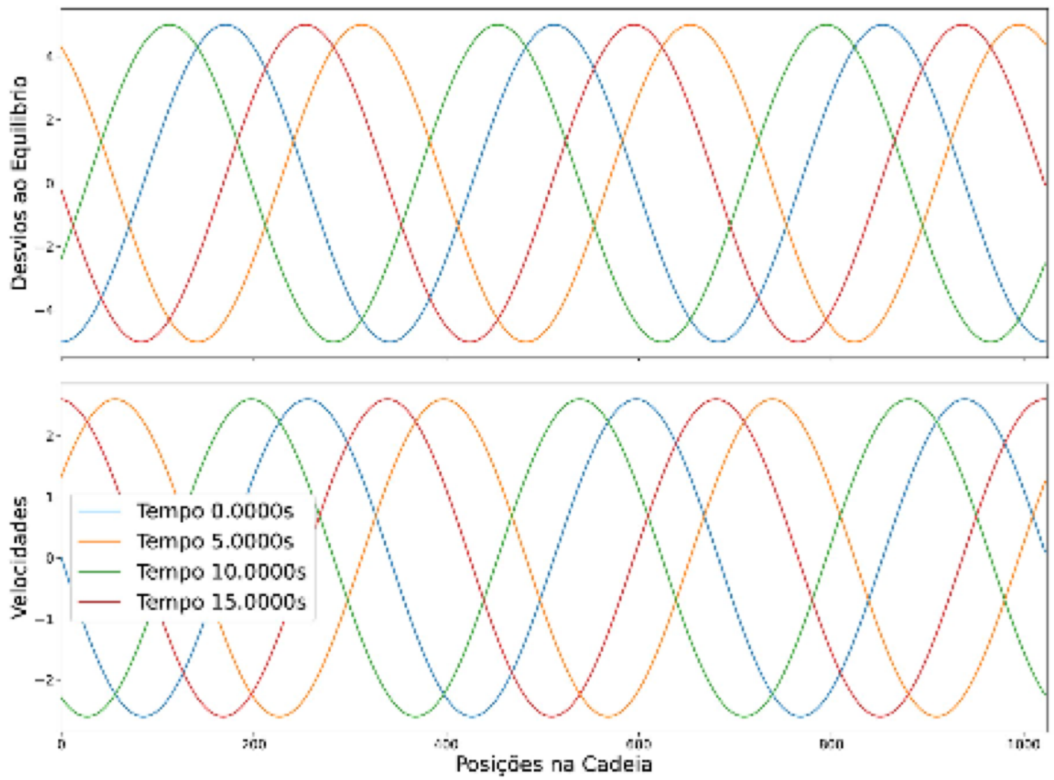
$$v = \frac{\omega(K)}{K} = \frac{2\sqrt{\frac{k}{m}}\left|\sin\left(\frac{1}{2}KD\right)\right|}{K}$$

$$= \frac{DN\sqrt{\frac{k}{m}}\left|\sin\left(\frac{\pi n}{N}\right)\right|}{\pi n}$$



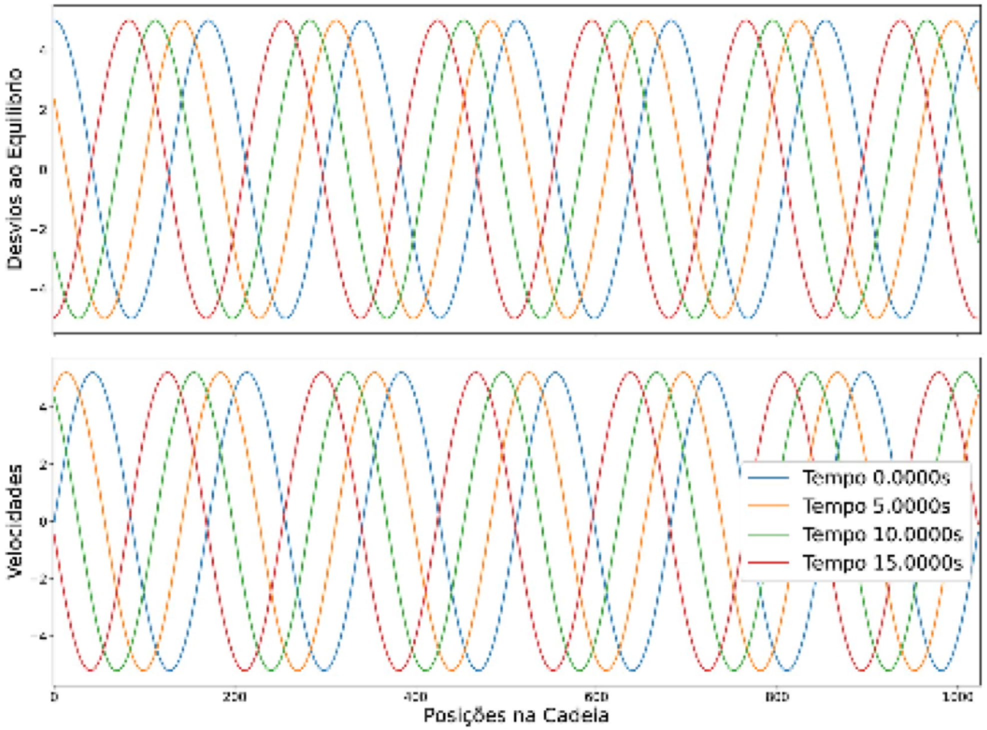
Cadeia linear :Onda

$$n = 3$$



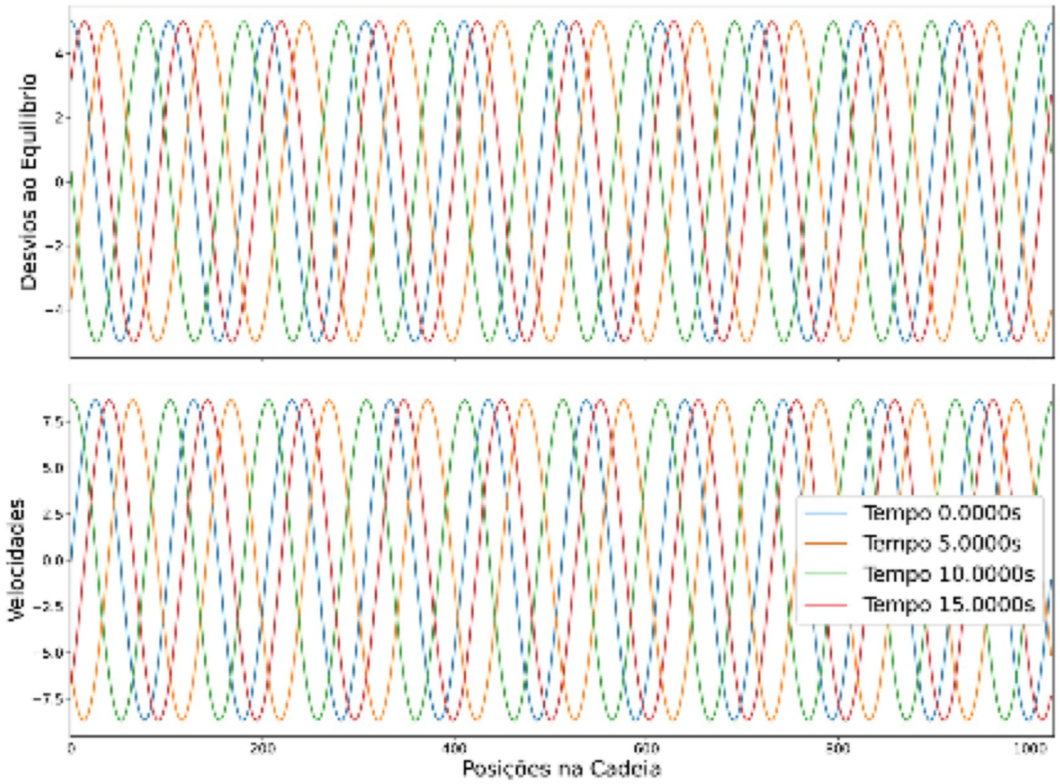
Cadeia linear : Onda

$$n = 6$$

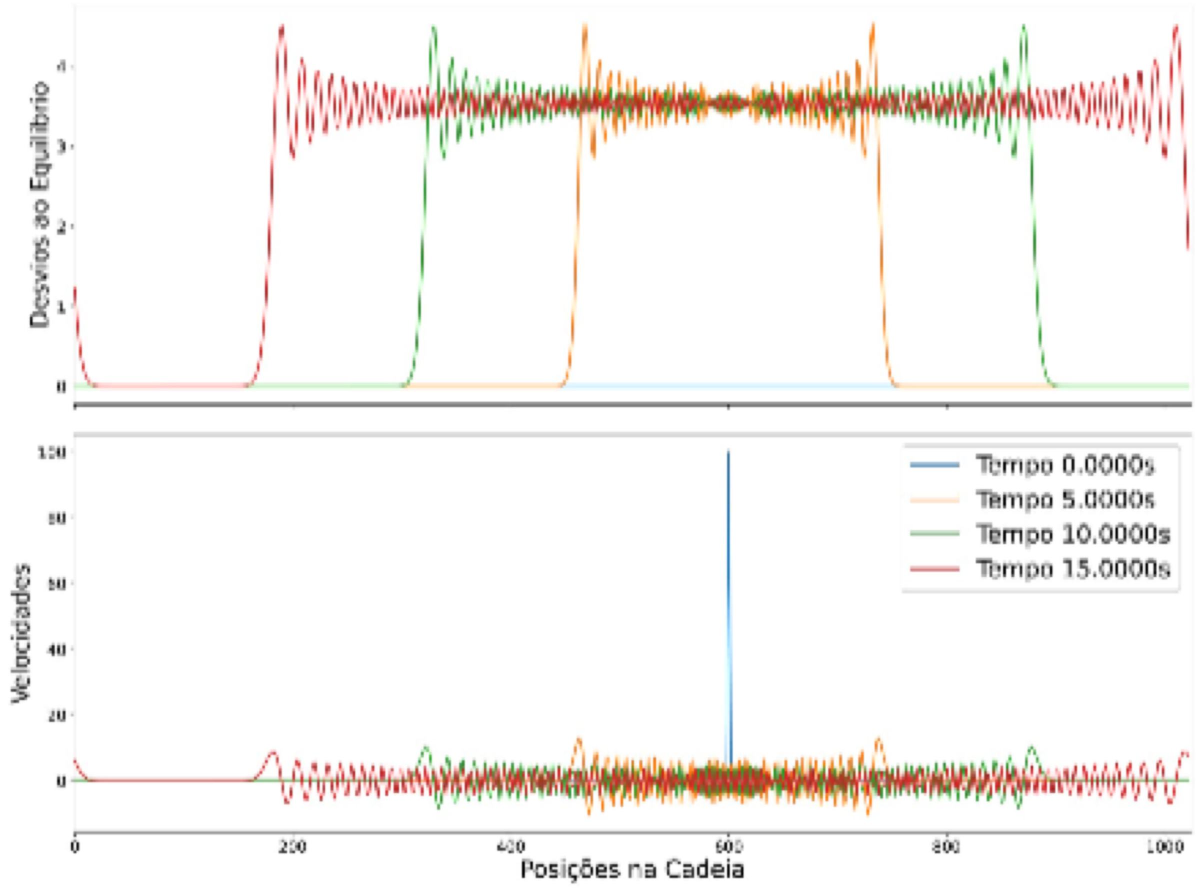


Cadeia linear: Onda

$n = 10$

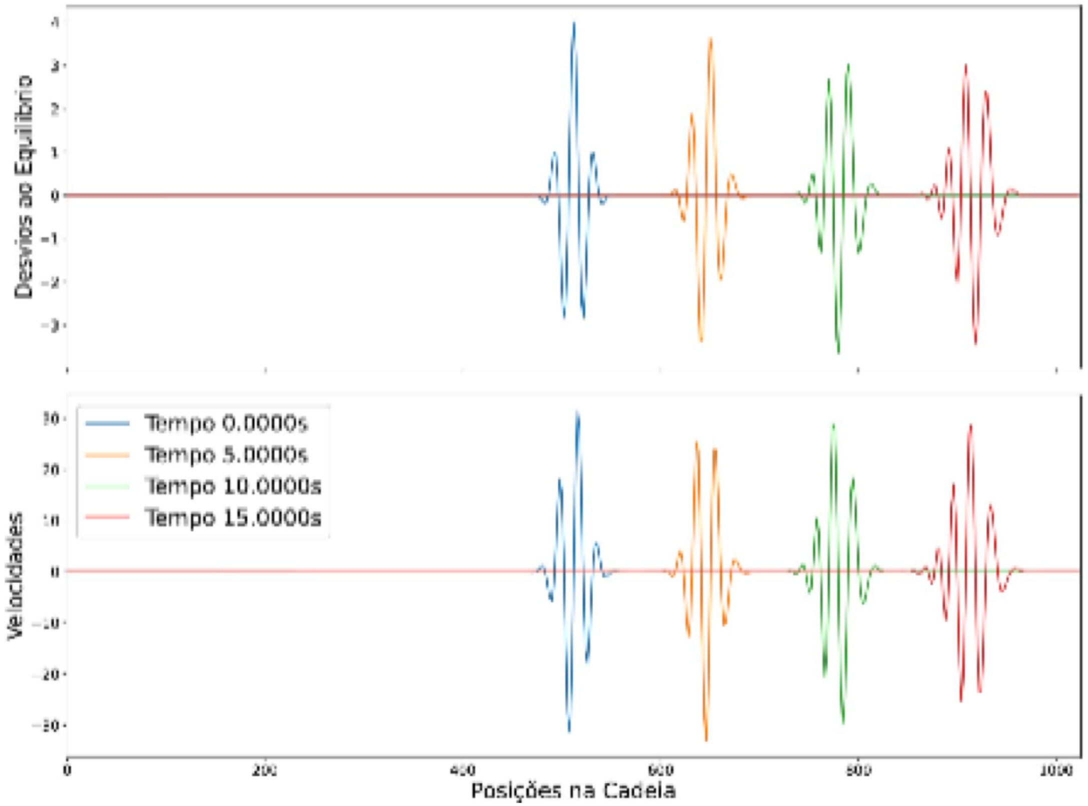


Velocidade inicial a uma das massas



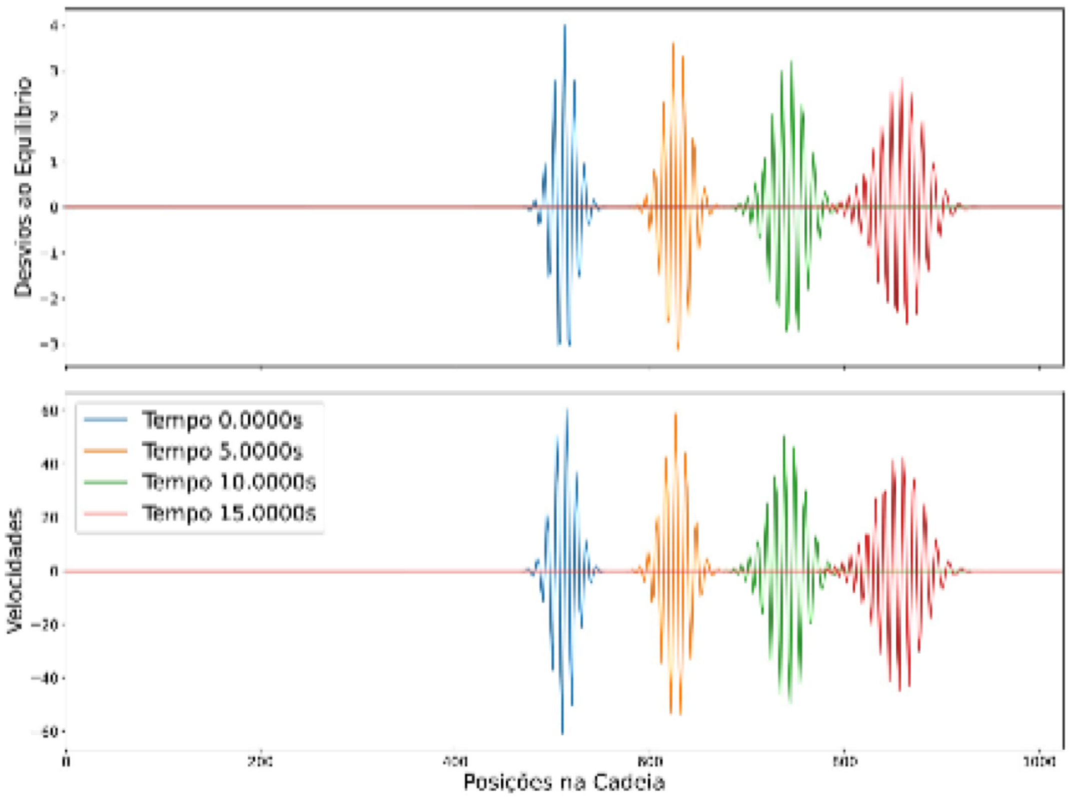
Cadeia linear – Impulso Gaussiano

$$n_{\text{central}} = 50$$



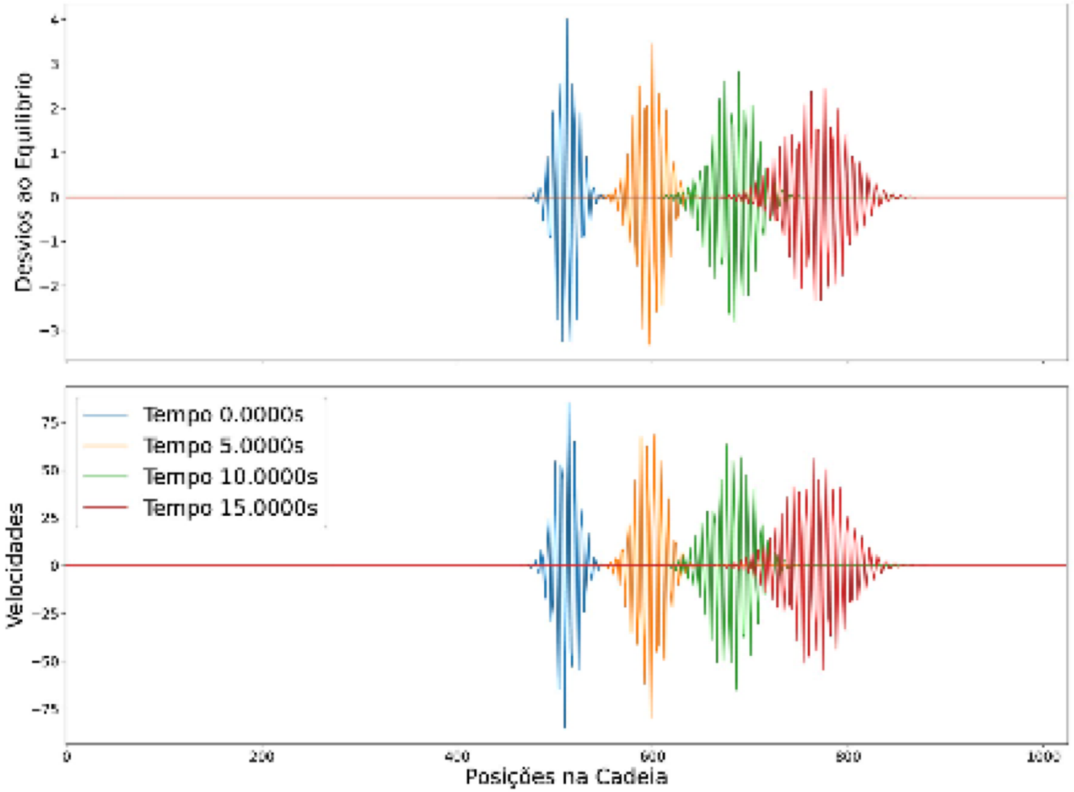
Cadeia linear – Impulso Gaussiano

$$n_{\text{central}} = 100$$



Cadeia linear – Impulso Gaussiano

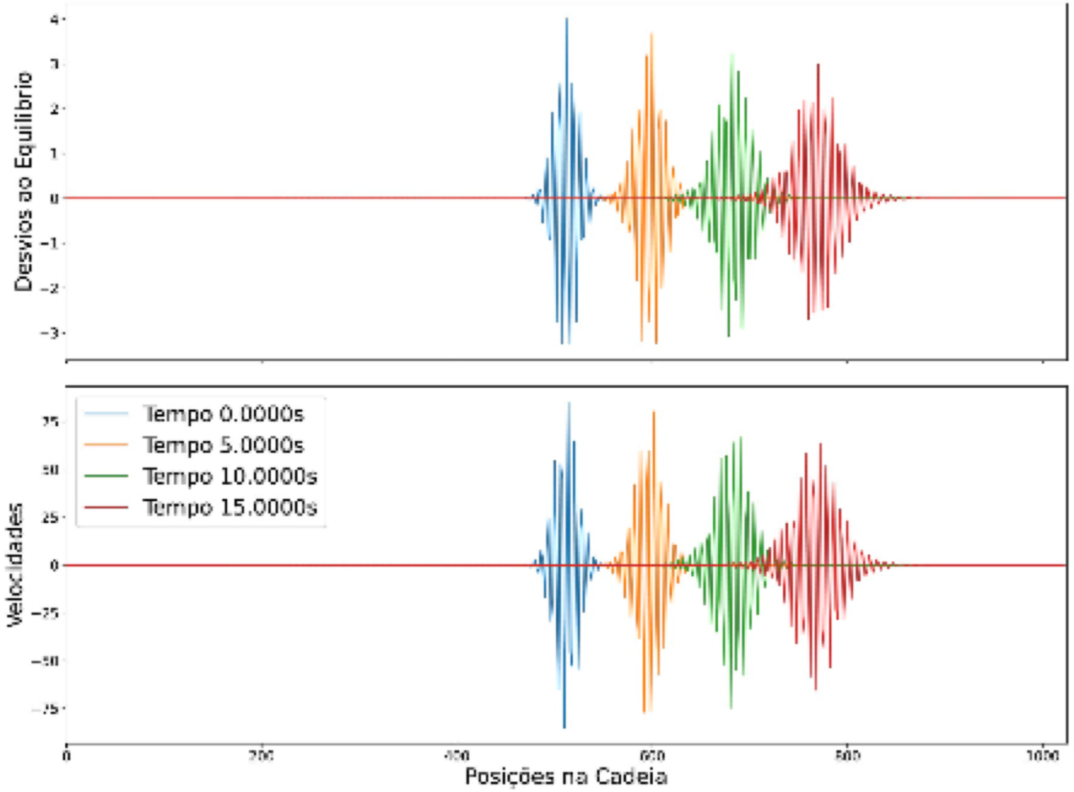
$$n_{\text{central}} = 150$$



Cadeia não-linear – Impulso Gaussiano

$$n_{\text{central}} = 150$$

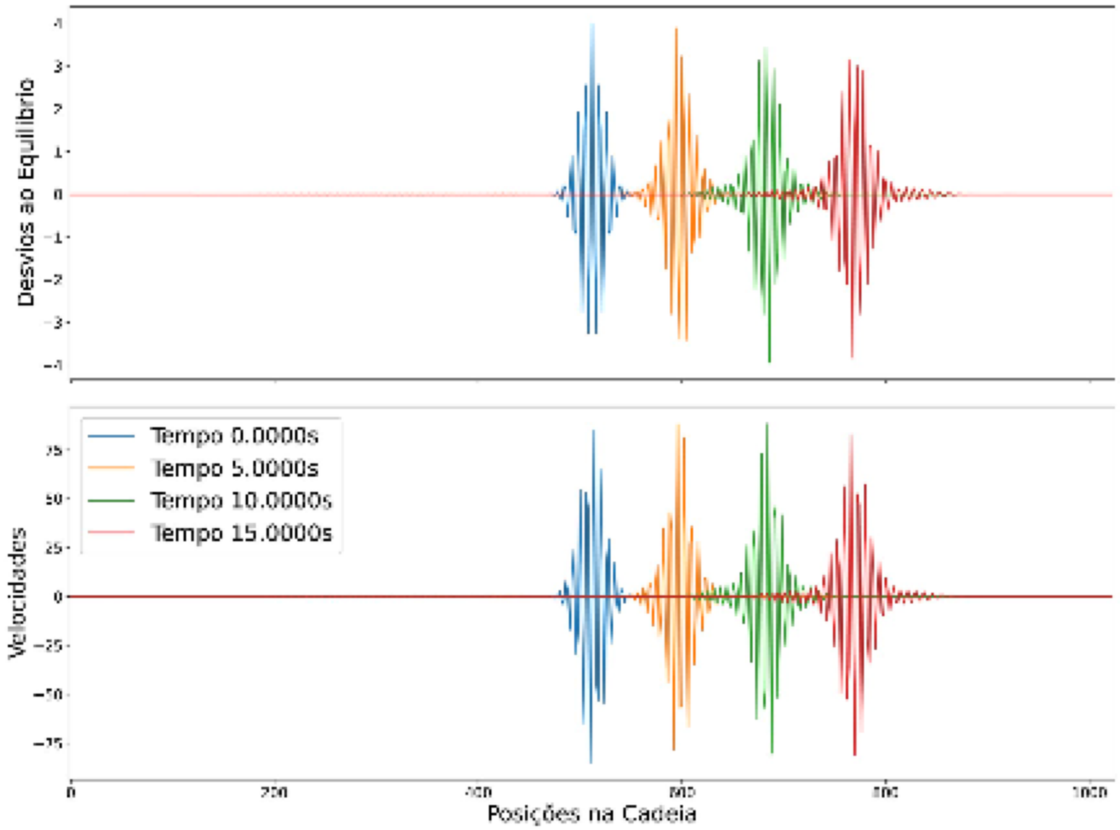
$$b = 0.003$$



Cadeia não-linear – Impulso Gaussiano

$$n_{\text{central}} = 150$$

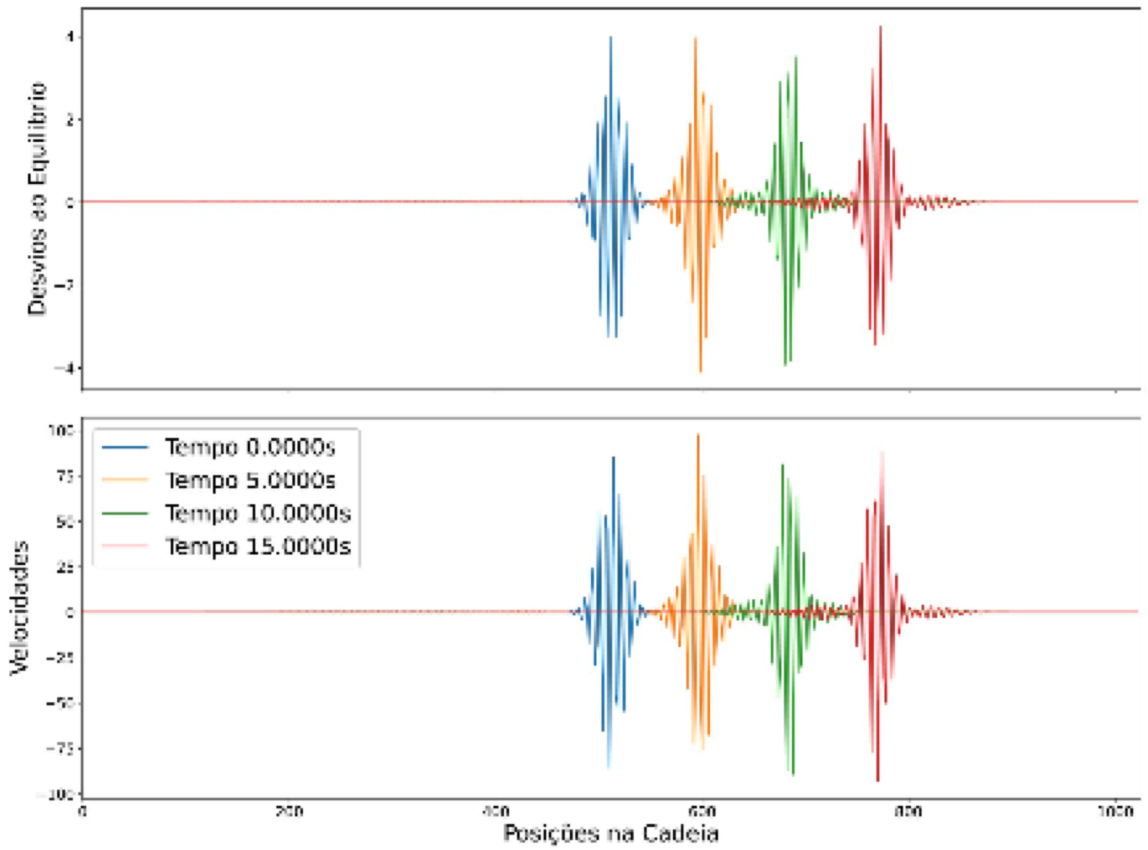
$$b = 0.006$$



Cadeia não-linear – Impulso Gaussiano

$$n_{\text{central}} = 150$$

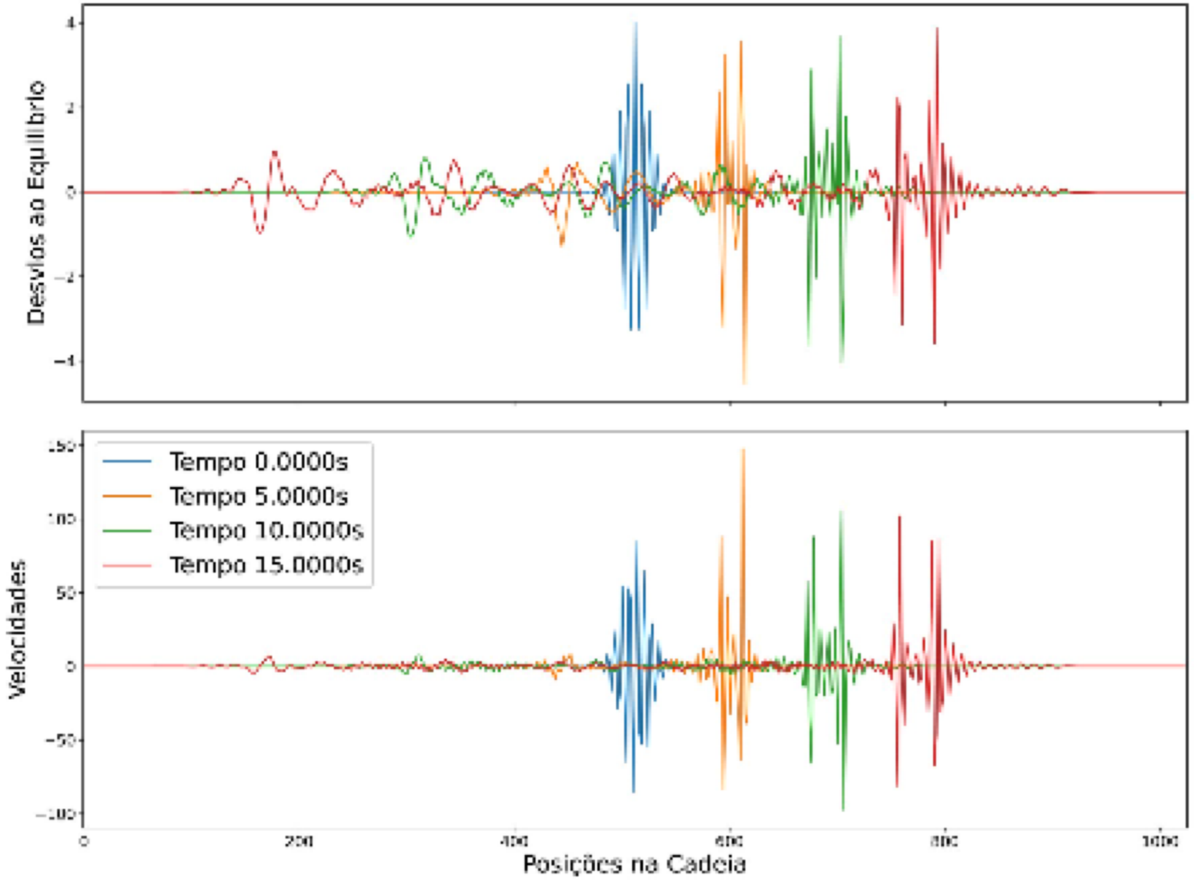
$$b = 0.0075$$



Cadeia não-linear – Impulso Gaussiano

$$n_{\text{central}} = 150$$

$$b = 0.1$$



Conclusões:

1. Analisámos o oscilador-harmónico e não-harmónico recorrendo ao método de Euler para resolver numericamente as equações de movimento; verificámos a conservação de energia.
2. Ao introduzir atrito observámos que a energia no sistema não se mantinha constante.
3. Analisámos um sistema de duas massas e verificámos a transferência de energia entre as duas massas.
4. Estudámos uma cadeia periódica de massas acopladas por molas lineares e não lineares.
5. Nesta cadeia verificámos a propagação de ondas planas e pulsos , concluindo que a não linearidade é necessária para a existência de um solitão, porque no caso linear existe dispersão.